Лекция 7. Общая структура моделирующего алгоритма

Цель лекции: применять общую структуру моделирующего алгоритма для разработки комьютерных моделей и постановки экспериментов на них;
Ключевые слова: регенеративный метод, показатели эффективности

Основные вопросы:

1. Виды моделей
2. Регенеративный метод анализа результатов моделирования
3. Показатель эффективности
4. Модель бензоколонки

Общая структура моделирующего алгоритма должна обеспечить достижение основной задачи имитационного моделирования – нахождения оптимального варианта или оптимальных значений параметров исследуемой системы. Для достижения этой цели необходимо, во –первых, уметь моделировать процесс функционирования системы на любом заданном интервале времени, во-вторых, обеспечить требуемую точность и достоверность полученных значений характеристик и показателей системы при условии учета различных случайных факторов и, в-третьих, иметь возможность поиска оптимальных вариантов системы [х].

Указанные требования предопределяет общую структуру моделирующего алгоритма, включающую три уровня или три цикла моделирования.(рисунок 16) Внутренний цикл (блоки 5-8) позволяет моделировать поведение системы по заданной модели на интервале [0,T].

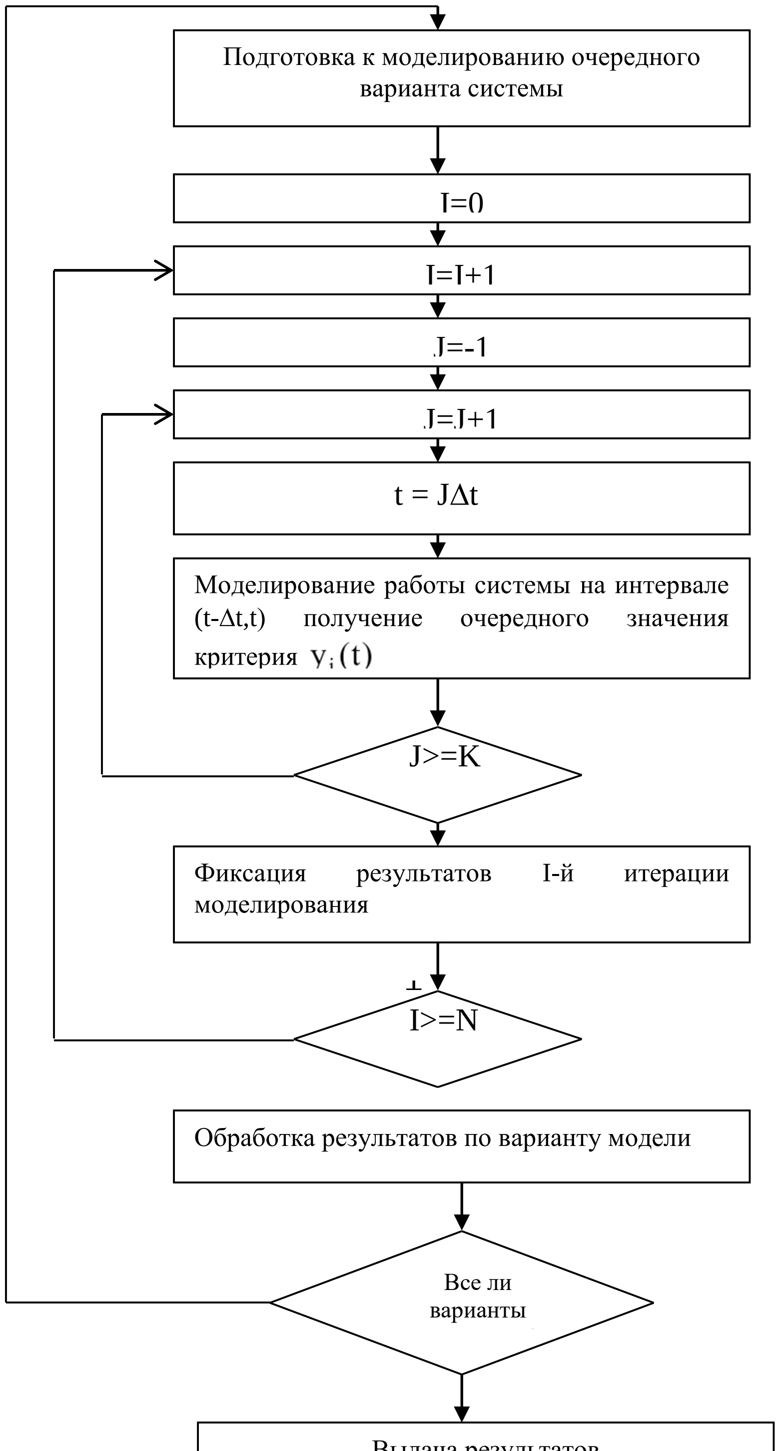
В следующем цикле, включающем блоки с 3 по 10 организуются N- кратное повторение прогона, позволяющее после соответствующей статистической обработки результатов (блок 11), судить об усредненных характеристиках моделируемого варианта системы. Окончание варианта может определяться не только заданным числом прогонов, как показано на рис 1. (блок 10), но и заданной точностью результатов.

Внешний цикл охватывает оба предшествующих цикла и включает дополнительно блоки 1,2,11,12, управляющие последовательностью моделирования вариантов системы. Здесь организуется, в частности, поиск оптимальных параметров системы: блок 11 осуществляет проверку, удовлетворительны ли показатели системы, а блок 1 производит изменения параметров так, чтобы улучшить эти показатели.

Следует отметить, что во многих случаях, когда нет надобности рассматривать различные варианты системы, можно ограничиться двухуровневой структурой моделирующих алгоритмов.

Планирование эксперимента.

Главной особенностью этапа экспериментирования при имитационном моделировании является то, что из-за учета действия различных случайных факторов результаты моделирования также носят случайный характер. Поэтому для обеспечения заданной точности полученных оценок необходимо усреднять результаты большого количества реализаций. Для определения количества реализаций необходимо установить зависимость между точностью оценки, количеством реализаций и доверительной вероятностью. Найдем количественную связь между указанными величинами для различных оценок случайных величин и процессов.


Подготовка к моделированию очередного варианта системы
I=0
I=I+1
J=-1
J=J+1
t = JΔt
Моделирование работы системы на интервале (t-Δt,t) получение очередного значения критерия $y_i(t)$
J>=K
Фиксация результатов I-й итерации моделирования
I>=N
Обработка результатов по варианту модели
Все ли варианты

1) Определение количества реализаций для оценки вероятности

Вероятность p оценивается отношением, где m – число случаев наступления события A при N реализациях. Это отношение можно представить в иной форме

$$\bar{p} = (1/N)\sum_{i=1}^{N} \xi_i \tag{4}$$

где ξ_i - дискретная случайная величина с законом распределения

$$\xi_i = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ p & 1-p \end{vmatrix}$$

Определим математическое ожидание и дисперсию оценки p

$$M[(1/N)\sum_{i=1}^{N} \xi_i] = (1/N) - M[\xi_i] = N * p / N = p$$

(5)

$$D\{(1/N)\sum_{i=1}^{N} \xi_i\} = (1/N^2)\sum_{i=1}^{N} D[\xi_i] = (1/N^2)N * p(1-p) = p(1-p)/N\,. \tag{6}$$

Теперь установим зависимость между точностью оценки *E, E* количеством реализаций N и доверительной вероятностью α:

$$P\{[m/N - p] < \xi\} = \alpha$$

В силу центральной предельной теоремы теории вероятностей оценка (4) при достаточно больших N имеет распределение, близкое к нормальному. Поэтому из таблицы нормального распределения для каждого значения доверительной вероятности α можно выбрать величину t_α такую , что точность оценки будет равна

$$\varepsilon = [m/N - p] = t_\alpha \sqrt{D} \tag{7}$$

Подставляя (4-5) в (7), получим искомое выражение для количества реализации при оценке вероятности

$$N = t_\alpha^2 p(1-p)/\varepsilon^2 \tag{8}$$

Из (8) следует, что для определения N необходимо знать значения оцениваемой вероятности p, которое обычно неизвестно. Поэтому практически всегда производят предварительную «пристрелку», назначая какое-либо число реализаций N_0 и определяя $p_0 \approx K/N_0$. Затем найденное p поставляют в (8).

2) Выбор N при оценке математического ожидания и дисперсии.

Для оценки математического ожидания случайной величины используется среднее арифметическое $\bar{X} = (1/N)\sum_{i=1}^{N} X_i$.

Пусть необходимо построить такую оценку $\bar{X}$ истинного математического ожидания m , что $P\{m - \varepsilon \le \bar{X} \le m + \varepsilon\} = 1 - \alpha$.

По центральной предельной теореме при большом N среднее арифметическое имеет распределение, близкое к нормальному с математическим ожиданием m и дисперсией σ^2/N, где σ^2 дисперсия оцениваемой случайной величины. Поэтому, подставляя в формулу, аналогичную (7), дисперсию σ^2/N будем иметь

$$\varepsilon = [X - m] = t_\alpha * \sigma\sqrt{N}$$

Следовательно

$$N = t_\alpha^2 \sigma^2 / \varepsilon^2$$

Так как σ^2 заранее неизвестна, то вместо нее используется оценка S^2, полученная по формуле

$$S^2 = (1/N_0 - 1)\sum_{i=1}^{N0}(X_i - X),$$

В результате предварительной «пристрелки» с числом реализаций N_0 .

Определим число реализаций N, необходимое для получения оценки дисперсии. При этом предполагается, что

$$P\{(1-\varepsilon)\sigma^2 \le S^2 \le (1+\varepsilon)\sigma^2\} = 1 - \alpha,$$

где $0 \le \varepsilon \le 1$ – число, характеризующее степень близости оценки S^2 к истинной дисперсии σ^2.

Так как S^2 распределена асимптотически нормально с параметрами

$m[S^2] = (N - 1/N)\sigma^2$; $D[S^2] = (m_4 - \sigma^4)/N + 0(1/N^2)$

То пренебрегая $0(1/N^2)$ и учитывая, что в случае нормального распределения оцениваемой случайной величины $m_4 = 3\sigma^4$

Получим $\varepsilon = [S^2 - \sigma^2] = t_\alpha \sqrt{(2\sigma^4 / N)}$

Следовательно $N = 2t_\alpha^2 \sigma^4 / \varepsilon^2$.

Для определения σ здесь также используется «пристрелка».

Регенеративный метод анализа результатов моделирования

Этап обработки результатов имитационного моделирования также имеет свою особенность. Она связана с тем, что многие объекты имитационного моделирования обладают свойством время от времени регенерироваться, т.е. стохастические процессы, протекающие в таких системах, постоянно возвращаются в некоторую точку (точку регенерации), начиная с которой дальнейшее развитие процесса не зависит от его поведения *в прошлом* и определяется одним и тем же вероятностным законом. Если результаты моделирования таких систем группировать в соответствии с последовательными возвращениями в точку регенерации, то эти группы статистически независимы и одинаково распределены, что сильно облегчает их статистический анализ.

Последовательность $\{X_n\}$ случайных векторов размерности К является регенерирующим процессом, если существует возрастающая последовательность

$$1 \le \theta_1 < \theta_2 < \ldots$$

случайных дискретных моментов времени, называемых моментами регенерации, такая, что протекание процесса, начиная с каждого из этих моментов, определяется теми же вероятностными законами, что и в момент θ_1. Часть процесса $\{X_n\}$ в интервале $\theta_j \le n \le \theta_{j+1}$ будем называть j-м циклом. Введем также понятие периода регенерации α_j

$$\alpha_j = \theta_{j+1} - \theta_j.$$

Эти периоды являются независимыми и одинаково распределенными величинами.

Пусть далее

$$Y_j = \sum_{i=\theta j}^{\theta j+1-1} f(X_i),$$

где $f(X_i)$ - некоторая функция от К аргументов, принимающих действительные значения. Соответствующим выбором функции f можно оценить достаточно широкий класс стационарных характеристик, представляющих практический интерес.

Далее примем, что моделирования состоит в оценке значения M[f(X)].

Так как Y_j является суммой значений $f(X_i)$ на j-м цикле (j-й группе), то последовательность (Y_j, α_j) состоит из независимых и одинаково распределенных случайных векторов. При достаточно слабом предположении, что $M\{f(X)\} < \infty$,

можно получить выражение

$$M\{f(X)\} = M\{Y_j\} / M\{\alpha_j\}. \qquad (9)$$

Действительно

$$\{f(X_1) + ... + f(X_n)\} / N \to M\{f(X)\} \qquad (10)$$

При $N \to \infty$.

И если n-й цикл завершается в момент N, то отношение в (9) можно записать иначе:

$$((Y_1 + ... + Y_n) / n) / (\alpha_1 + ... + \alpha_n) / n \qquad (11)$$

Но отношение (11) с вероятностью 1 сходится к $M\{Y_1\} / M\{\alpha_1\}$ при $n \to \infty$. И, следовательно, получим соотношение (9). Таким образом, можно констатировать, что задача оценки $M\{f(X)\}$ такая же, как и оценка отношения, которое на основе классической статистики, можно оценить по независимым и одинаково распределенным парам

$$\{Y_1, \alpha_1\}, ..., \{Y_n, \alpha_n\}.$$

Основная литература :3 [16-25].

Контрольные вопросы

1.Что рассматривают внутренний и внешний цикл?

2.Какой формулой определяется количества реализации?

3.Что такое регенеративный метод анализа результатов моделирования?

Тема лекции № 5 Моделирование фирмы .

«Паутинообразная» модель фирмы. Модель бензоколонки.

Цель моделирования. Вложить средства в создание фирмы, которая будет выпускать товар и реализовывать его на рынке. Нас интересует , как будет вести себя цена на товар при изменении объема производства. Опыт подсказывает, что при увеличении производства происходит падение спроса и приходится снижать цену. Нам нужно знать, при каких условиях цена будет стабильной.

Спрос на некоторый продукт на заданном отрезке времени зависит от цены на этом отрезке. Что же касается предложения, то оно определяется ценами предыдущего периода времени. Кроме того, предполагается, что рынок всегда находится в условиях локального равновесия.

Существуют четыре варианта этой модели: детерминированной, вероятностная, модель с обучением и модель с запасами.

В детерминированной модели отсутствует учет влияния случайных факторов.

В вероятностной модели учитываются влияние на спрос непредвиденных колебаний предпочтений и доходов потребителей, а также другие случайные факторы, влияющие на величину спроса Предложение на предыдущем отрезке времени также считается подверженным влиянию случайных факторов. Они отражают влияние колебаний технологии и эффективности производственного процесса и т.д .Наконец, условие локального равновесия означает совпадение спроса и предложения с точностью до некоторой случайной величины.

В модели с обучением предполагается, что поставщики учитывают сложившуюся тенденцию изменения цен и с учетом этого планируют выпуск продукции на очередной отрезке времени.

В модель с запасами вводится дополнительная группа участников рыночного механизма, которых можно назвать «коммерсантами».Они держат запасы и организуют торговлю.

Для нашего случая подойдет вероятностная модель с обучением.

Обозначения: D_T - спрос на Т-м отрезке времени.;

A, B, C, E –коэффициенты линейного уравнения;

P_T - цена на Т-м отрезке времени;

U_T, V_T, W_T - случайная величина с заданным законом распределения.

S_T — предложение на Т-м отрезке времени

Концептуальная модель.

Пусть имеется торговая фирма, реализующая некоторый товар на рынке.

Спрос на товар на Т-м отрезке времени линейно зависит от текущей цены P_T и случайной переменной U_T, учитывающей влияние случайных факторов на величину спроса. Переменная U_T имеет нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием M_u и заданным среднеквадратическим отклонением σ_u. Таким образом, зависимость для спроса на товар имеет следующий вид:

$$D_T=A-B*P_T+U_T.$$

Предложение на Т-м отрезке времени рассчитывается с учетом обучения системы. Поэтому оно зависит от цены на предыдущих (Т-1)-м и (Т-2)-м отрезках времени и случайной переменной V_T, которая учитывает влияние случайных факторов на величину предложения. Переменная V_T имеет нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием M_V и заданным среднеквадратическим отклонением (СКО) σ_V. Таким образом, зависимости для предложения имеют следующий вид:

$$S_T=C+E*P(\rho)+V_T,$$

$$P(\rho)=P_{T-1}-\rho(P_{T-1}-P_{T-2}),$$

где ρ-весовой коэффициент, задаваемый в диапазоне ($0\le\rho\le1$).

Условие локального равновесия рынка означает совпадение спроса и предложения с точностью до случайной величины W_T имеет нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и заданным СКО σ_W.Зависимость, учитывающая равновесие рынка, имеет вид:

$$S_T=D_T+W_T \qquad (12)$$

Подставляя выражения для D_T, $P(\rho)$ и S_T в (5.1) и разрешая уравнение относительно P_T, получаем:

$$P_T=\{A-C-E[P_{N-1}-\rho(P_{T-1}-P_{T-2})]+U_T-V_T+W_T\}/B \qquad (13)$$

Поскольку для определения величины P_T необходимо знать значения P_{T-1} и P_{T-2} для двух предыдущих отрезков времени, то проводить расчеты по формуле (12) можно только, начиная с 3-го отрезка, при условии, что P_1 и P_2 известны.

Для нахождения сделаем дополнительное допущение о том, что на первых двух отрезках обучение отсутствует, т.е. весовой коэффициент ρ=0. Без учета случайностей цена на 2-м отрезке определится по формуле

$$P_2=(A-C-E*P_1)/B. \qquad (14)$$

Если предположить, что перед началом работы фирмы исходная цена совпадает с ценой на 1 –м отрезке, то величина P_1 определится по формуле.

$$P_1=(A-C)/(B+E) \qquad (15)$$

Задача моделирования заключается в исследовании влияния параметров системы на характер зависимости цены от времени.

Схема алгоритмов модели.

Схема алгоритма процедур обработки прерываний показана на рисунке 17. После подачи команды Start на экране появляется активная стартовая форма. С этого момента программа находится в режиме ожидания действия пользователя.

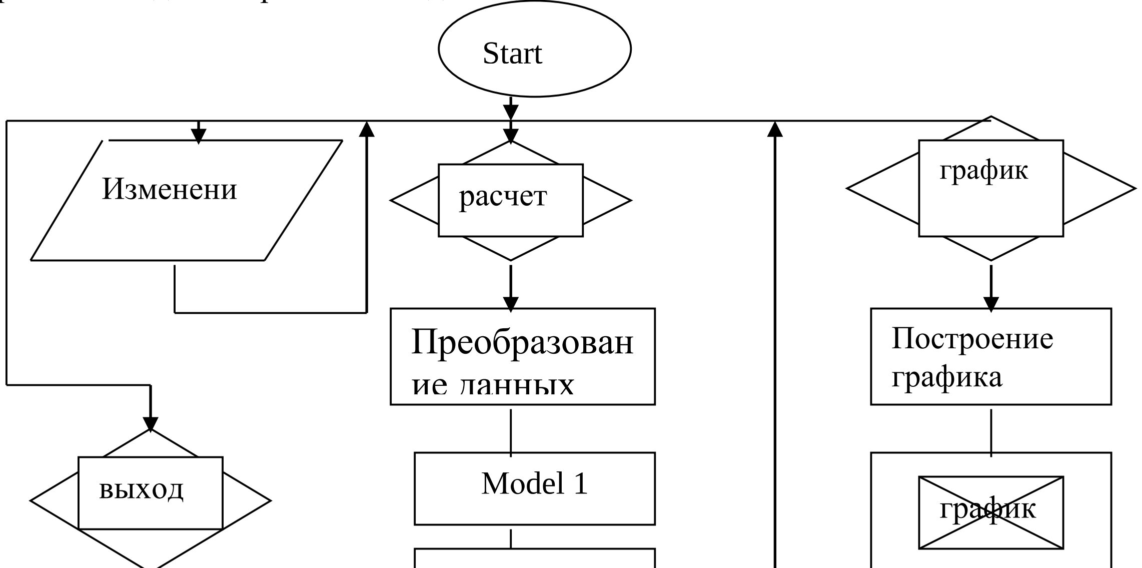


Рисунок 17-Схема алгоритма процедур обработки прерываний

Цифрой 1 на схеме обозначено действие пользователя, которое заключается в корректировке исходных данных. Измененные данные вводятся в соответствующие текстовые поля. При этом фиксируются в памяти не как числа, а как значения символьных переменных. Цифрой 2 на схеме обозначено действие пользователя, которое заключается в нажатии командной кнопки «Расчет». В результате этого вызывается одна из так называемых процедур прерываний. Внутри этой процедуры оператор 3 производит преобразование символьных данных в числовые.

Затем оператор 4 обращается к программному модулю общего назначения «Model 1», который производит расчет массива значений цен как функций времени. После окончания работы программного модуля оператор 5 делает кнопку «Расчет» неактивной, а оператор 6 активизирует кнопку «График». Одновременно производится очистка части стартовой формы, которая отведена для построения графика.

Цифрой 7 на схеме обозначено действие пользователя, которое заключается в нажатии кнопки «График».В результате группа операторов 8 обеспечивает построение в центре стартовой формы графика зависимости текущей цены н продукт от времени. Затем оператор 9 делает кнопку «График» неактивной, а оператор 10 вновь активизирует кнопку «Расчет». Числом 11 на схеме обозначено действие пользователя, которое заключается в нажатии кнопки «Выход». В этом случае работа программы заканчивается.

Схема алгоритма модуля «Model 1» показана на рисунке 18.

Внутри этого модуля группа операторов 1 определяет цены для 1-го и 2-го отрезков времени по формулам (14), (15). Оператор 2 является началом циклического перебора временных отрезков, начиная с 3-го и кончая последним T_{K-M}.

Группа операторов 3 вырабатывает три возможных значения эталонной случайной величины η с нормальным распределением, которые используются группой операторов 4 для расчета возможных значений случайных переменных U_T ,$V_{T,}$ W_T с заданным СКО. Оператор 5 осуществляет расчет выходной переменной P_T по формуле (13) . Оператор 6 подготавливает новые значения переменных P_{T-1} и P_{T-2} для расчета $P_т$ на следующем временном отрезке (следующем витке цикла).

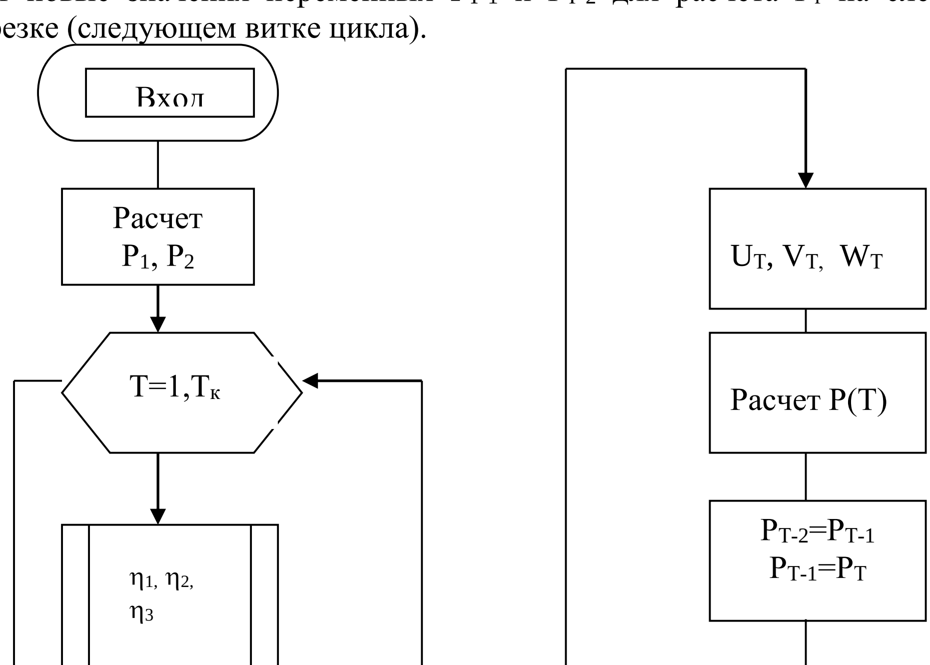


Рисунок 18 - Схема алгоритма модуля «Model»

*Модель бензоколонки.*Задача моделирования. Предприниматель хочет вложить деньги в строительство новой бензоколонки. Однако точного представления о том, сколько автомашин будет ежедневно заправляться на той колонке. Какова должна быть оптимальная структура бензоколонки и на получение какой прибыли он может рассчитывать?

Нужно выбрать математическую схему, которая ближе всего подходит к такой экономической системе, как бензоколонка.

Математической схемой является схема системы массового обслуживания. Для таких систем характерны три отличительные особенности:

1) имеется поток клиентов, желающих быть обслуженными (в данном случае это поток автомашин, желающих заправиться бензином);

2) имеются устройства или агрегаты, которые обеспечивают удовлетворение заявок клиентов (в данном случае одна или несколько раздаточных колонок);

3) имеется определенный набор правил обслуживания клиентов (т.е.никто не имеет права на заправку вне очереди).

Пусть имеется система массового обслуживания с переменным числом каналов N_k, которое может принимать любое значение в диапазоне от одного до трех. Входной поток заявок – простейший, следовательно, время между соседними заявками имеет показательное распределение с известным математическим ожиданием (средним значением) $T_{з.ср}$.

Время обслуживания заявки в любом канале – величина случайная, имеющая показательное распределение с известным средним временем обслуживания $T_{обс.ср}$.

Все заявки однородны и независимы.

Правило обслуживания состоит в том, что очередная заявка поступает в тот канал, который раньше других освободился. Если время ожидания начала обслуживания превышает заданную величину $T_{ож.max}$, то заявка покидает систему не обслуженной. Период функционирования СМО характеризуется величиной $T_{кон}$.

Таким образом входными характеристиками модели являются: число каналов N_k, среднее время между соседними заявками $T_{з.ср}$, среднее время обслуживания заявки $T_{обс.ср.}$, максимально допустимое время ожидания $T_{ож.max}$, период работы системы $T_{кон}$, число случайных реализаций моделируемого процесса N_p.

Выходной характеристикой модели является среднее число обслуженных заявок $N_{обс.ср}$.

Выбор показателя и критерия эффективности

В качестве показателя эффективности работы системы целесообразно выбрать среднюю прибыль, определяемую по формуле

$$C_{ср} = C_1 * N_{обс.ср} - C_2(N_k), \tag{16}$$

где C_1 - чистая прибыль, полученная в результате обслуживания одной заявки;

$C_2(N_k)$ - издержки обслуживания всех заявок, зависящие от числа каналов.

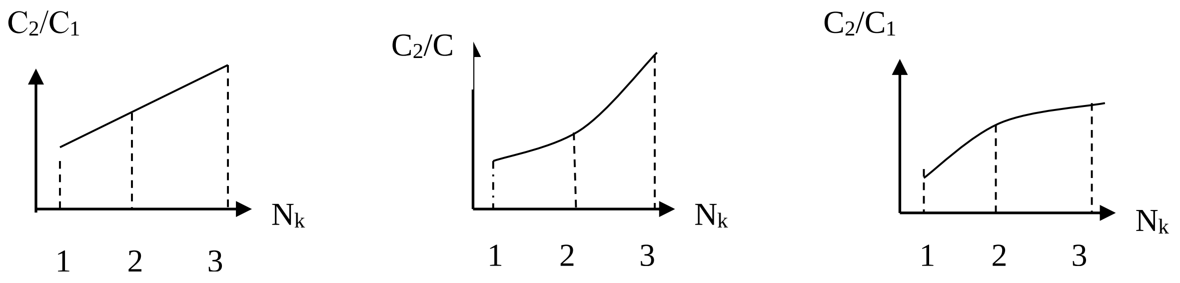
Разделим обе части равенства (5..5) на величину C_1. Получим следующее выражение для расчета показателя эффективности:

$$C_{ср.отн} = N_{обс.ср} - \frac{C_2}{C_1}(N_k) \qquad (17)$$

где $C_{ср.отн}$ - средняя относительная прибыль.

Величину C_2/C_1 (отношение издержек обслуживания к чистой прибыли, полученной в результате обслуживания одной заявки) будем рассматривать как функцию числа каналов.

Предположив, что возможными вариантами этой функциональной зависимости являются: *а* – линейная зависимость; *б*- возрастающая зависимость с положительной 2-й производной и *в*-возрастающая зависимость с отрицательной 2-й производной (рисунок 19).



а *b* *в*

Рисунок 19 - Зависимости отношения C_2/C_1 от N_k

а –первый вариант; б -второй вариант; в -третий вариант.

Выберем второй вариант. Примем в качестве конкретной зависимости издержек обслуживания от числа каналов следующую функцию:

$$\frac{C_2}{C_1}(N_k) = 1 - 0.5 * N_k + 0.5 * N_k^2 \qquad (18)$$

Итак, для расчета показателя эффективности будем использовать зависимости (16) и (17).

В качестве критерия выбора наивыгоднейшей структуры СМО примем оптимальное число каналов, обеспечивающее максимум средней относительной прибыли:

$$K(N_k*) : MAX[C_{сротн}(N_k)] \qquad (19)$$

где $N*_k$ -наивыгоднейшее число каналов.

Схемы алгоритмов модели

Общий вид стартовой формы показан на рисунке 20. Видно, что она включает ряд объектов управления, среди которых имеются три командные кнопки: «Расчет», «Очистка» и «Выход».

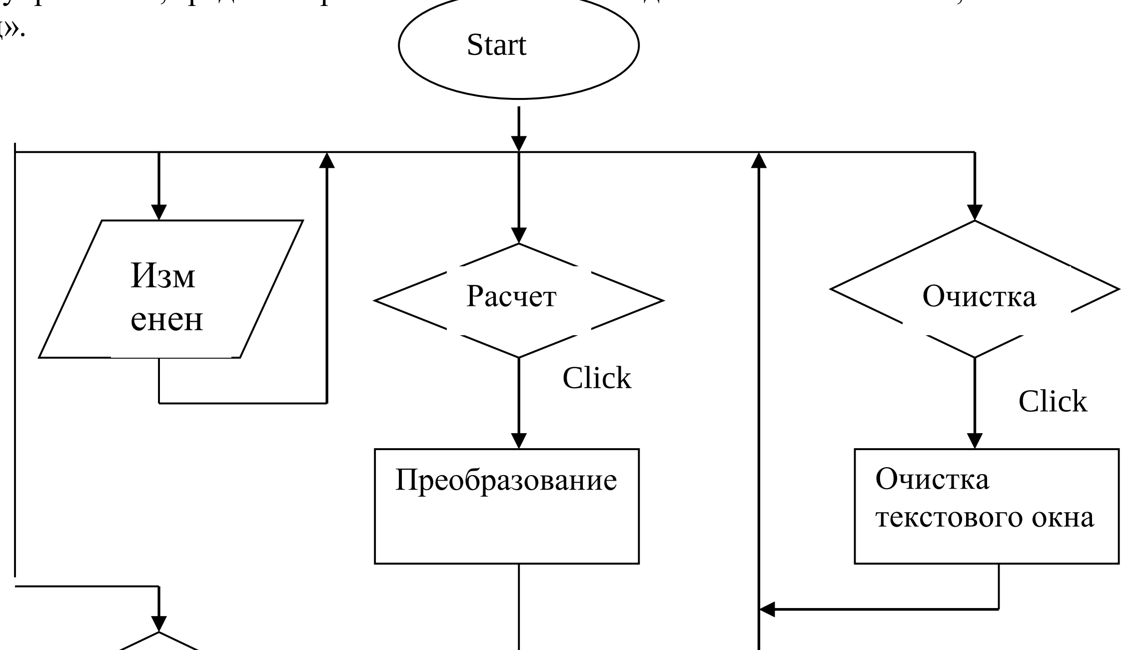


Рисунок 20 - Схема алгоритма процедур обработки прерываний

Click

После пки «Start» активизируется стартовая форма. С этого момента программа находится в режиме ожидания действий пользователя.

Цифрой 1 обозначено действие, заключающееся в корректировке исходных данных. Необходимые изменения вносятся в соответствующие текстовые поля.

Цифрой 2 обозначено действие, заключающееся в нажатии кнопки «Расчет». В процедуре, связанной с этой кнопкой, оператор 3 осуществляет перевод исходных данных из символьной формы в числовую. Затем оператор 4 обращается к модулю общего назначения «Model2». Схема алгоритма этого модуля приведена на рисунке 21.

После окончания работы модуля и выдачи на экран результатов моделирования работа процедуры, связанной с кнопкой «Расчет», заканчивается.

Цифрой 5 на схеме обозначено действие пользователя, заключающееся в нажатии кнопки «Очистка» В процедуре, связанной с ней, производится очищение текстового поля для вывода результата моделирования. Затем обычно производятся изменение исходных данных и проведение новых расчетов с использованием кнопки «Расчет».

Цифрой 7 на схеме обозначено действие пользователя, заключающееся в нажатии кнопки «Выход». В результате работа программы прекращается.

Оператор 1обнуляет глобальную переменную $SN_{обс}$ - суммарное число обслуженных заявок. Оператор 2 активизирует окно формы № 2 и делает неактивным окно формы № 1. оператор 3 начинает циклический перебор случайных реализаций. Оператор 4 выводит на экран счетчик числа рассчитанных реализаций.

Оператор 5 в начале каждой случайной реализации обнуляет локальные переменные, к которым относятся: число заявок, поступающих в одной реализации N_Z , число обслуженных заявок в каждом из трех каналов $N_{обс.1}$, $N_{обс.2}$, $N_{обс.3}$, начальные значения времени освобождения 1-го, 2-го и 3-го каналов T_{OK1} , T_{OK2} и T_{OK3}..

Оператор 6 обращается к автономной процедуре формирования потока заявок. В результате работы этой процедуры формируется массив значений времени[$T_З$ (1), $T_З$ (2), $T_З$ (3),…, $T_З$ ($N_{зi}$)]

где $N_{зi}$ – общее число поступивших заявок для i-й случайной реализации.

Оператор 7 является началом цикла обслуживания заявок. Оператор 8, 9, 10 и 11 производят выбор номера канала, который характеризуется наименьшим значением времени освобождения от обслуживания заявки.

Оператор 12 обращается к автономной процедуре обслуживания очередной заявки. На выходе этой процедуры определяется число обслуженных заявок в выбранном канале $N_{обс}(J_{min})$.

Оператор 13 служит для расчета суммарного числа обслуженных заявок по рекурсивной формуле

$$SN_{обс} = SN_{обс} + N_{обс.1} + N_{обс.2} + N_{обс3}.$$

После окончания цикла случайных реализаций оператор 14 возвращает свойство активного окна форме № 1. Оператор 15 рассчитывает и выводит н экран значение выходной переменной - средней относительной прибыли по формуле

$$C_{отн.ср} = N_{обс} - 1 + 0,5 * N_k - 0,5 * N_k^2$$

Контрольные вопросы

1. Какие виды модели существуют ?
2. По какой формуле рассчитывается показатель эффективности?
3. Чему равно число каналов в модели бензоколонки?

Основная литература:

1. Варфоломеев В.И. Алгоритмическое моделирование элементов экономических систем. Практикум. Уч.пособие. Москва «Финансы и статистика» . 2000.
2. Прицкер А. Введение в имитационное моделирование и язык СЛАМ. Монография, Москва, Мир.1987.
3. Шукаев Д.Н. Имитационное моделирование на ЭВМ. Уч.пос.Алматы, 1995.
4. Шукаев Д.Н. Моделирование случайных закономерностей на ЭВМ. Уч.пос. Алма-Ата, 1991.
5. Шукаев Д.Н., Абдуллина В.З., Муртазина А.У. Методические указания к практическим занятиям по курсу «Моделирование систем». Алма-Ата 1985.
6. Шукаев Д.Н., Абдуллина В.З., Муртазина А.У. Методические указания к лабораторным занятиям по курсу «Моделирование систем».Алма-Ата 1987.
7. Шеннон Р. Имитационное моделирование систем – искусство и наука. Монография, изд-во «Мир»1978.
8. Гмурман В.Е.Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистикеУч.пос для вузов.М.;Высш.школа, 1999.
9. Исмаилова Р.Т. Методические указания по курсу Имитационному моделированию для практических и самостоятельных работ. Алматы, КазНТУ, 2003г.
10. Исмаилова Р.Т. Методические указания по курсу Имитационному моделированию для лабораторных и самостоятельных работ .Алматы, КазНТУ, 2003г.